ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ
ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນາຖາວອນ

ກະຊວງສຶກສາທິການ
ກົມມັດທະຍົມສຶກສາ

ຫົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນ ນັກຮຽນເກັ່ງ

ວິຊາ ຄະນິດສາດ (ເວລາ 120 ນາທີ)

ຄັ້ງທີ XX ທົ່ວປະເທດ ປະຈຳສົກຮຽນ 2008 - 2009

1. ໃນລະບົບເສັ້ນເຄົ້າຫົວໜ່ວຍຕັ້ງສາກ $(o,\vec{i},\vec{j})$ ເພິ່ນໃຫ້ຮູບສາມແຈ ABC
ໂດຍວ່າ $\overrightarrow{AC}=\vec{x}+2\vec{y}$, $\overrightarrow{AB}=7\left(\vec{x}-\frac{2}{7}\vec{y}\right)$ ແລະ ເມັດ D ເປັນເມັດເຄິ່ງກາງຂອງ $[BC]$
ຊຶ່ງ $\overrightarrow{AD}=a\vec{x}+b\vec{y}$ ໂດຍທີ່ $\vec{x}$, $\vec{y}$ ບໍ່ແມ່ນເວັກເຕີສູນ.
ຈົ່ງຊອກຫາຂະໜາດຂອງເວັກເຕີ $\vec{u}=\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{i}+\frac{1}{a}\vec{j}$

2. ຈົ່ງພິສູດວ່າ ຖ້າ $\begin{cases}0<x<\pi\\0<y<\pi\end{cases}$ ແມ່ນ $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\frac{\sin x+\sin y}{2}$

3. ເພິ່ນໃຫ້ອັນດັບ ກຳນົດດັ່ງລຸ່ມນີ້:

   (1, 2) ວົງເລບທີ 1

   (3, 4, 5, 6) ວົງເລບທີ 2

   (7, 8, 9,10,11,12) ວົງເລບທີ3

   1) ຈົ່ງຊອກຫາຈຳນວນສຸດທ້າຍຂອງວົງເລບທີ n ຕາມຄ່າຂອງ n
   2) ຈຳນວນ 2009 ຢູ່ວົງເລບທີ່ເທົ່າໃດ? ຈົ່ງອະທິບາຍ.
   3) ຊອກຜົນບວກ ຂອງທຸກຈຳນວນໃນວົງເລບທີ່ບັນຈຸ 2009.

4. ເພິ່ນໃຫ້ຮູບສາມແຈ ABC ໂດຍທີ່ $AB=4\ cm; AC=3\ cm; BC=5\ cm.$

   1) ຈົ່ງສ້າງຮູບສີ່ແຈສາກ $ABXY$ ທີ່ມີເນື້ອທີ່ເທົ່າກັບເນື້ອທີ່ຂອງຮູບສາມແຈ ABC ຂ້າງເທິງ.
   2) ໂດຍຖອນຈາກຂໍ້ 1) ຈົ່ງສ້າງຮູບຈະຕຸລັດທີ່ມີເນື້ອທີ່ເທົ່າກັບເນື້ອທີ່ຂອງຮູບສາມແຈ ABC ຂ້າງເທິງ.

5. ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}\leq 2|a|$

6. ໃຫ້ຮູບສີ່ແຈສາກ $ABCD$ ຂີດ $BK \perp AC$. ເອີ້ນ M,N ແມ່ນ ເມັດແບ່ງກາງຂອງ $[AK]$ ແລະ $[CD]$

ຕາມລຳດັບ.

1) ຈົ່ງພິສູດ $\widehat{BMN} = 90^\circ$

2) ຈົ່ງຊອກເງື່ອນໄຂຂອງຮູບສີ່ແຈສາກ $ABCD$ ເພື່ອໃຫ້ຮູບສາມແຈ BMN ເປັນຮູບສາມແຈສາກທ່ຽງ.

ຂະໜານຕອບ

1. ໃນລະບົບເສັ້ນເຄົ້າທີ່ວໜ່ວຍຕັ້ງສາກ $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ເພີ່ນໃຫ້ຮູບສາມແຈ ABC

   ໂດຍວ່າ $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + 2\vec{y}$,$\overrightarrow{AB} = 7\left(\vec{x} - \frac{2}{7}\vec{y}\right)$ ແລະ ເມັດ D ເປັນເມັດເຄິ່ງກາງຂອງ $[BC]$

   ຊຶ່ງ $\overrightarrow{AD} = a\vec{x}$ +b$\vec{y}$ ໂດຍທີ່ $\vec{x}$, $\vec{y}$ ບໍ່ແມ່ນເວັກເຕີສູນ.

   ຈົ່ງຊອກຫາຂະໜາດຂອງເວັກເຕີ $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{\imath} + \frac{1}{a}\vec{\jmath}$

   ບົດແກ້:

$$\overrightarrow{AD} = a\vec{x} + b\vec{y} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}[(\vec{x} + 2\vec{y}) + (7\vec{x} - 2\vec{y})]$$

   ເຮົາໄດ້ $2a\vec{x} + 2b\vec{y} = 8\vec{x}$ ແລະ $\begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases}$, ຍ້ອນ $\vec{x},\vec{y} \neq \vec{0}$

   ສະນັ້ນ $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{\imath} + \frac{1}{4}\vec{\jmath}$ ແມ່ນ $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$

2. ຈົ່ງພິສູດວ່າ ຖ້າ $\begin{cases} 0 < x < \pi \\ 0 < y < \pi \end{cases}$ ແມ່ນ $\sin(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{sinx+siny}{2}$

   ບົດແກ້: ຈາກ $\begin{cases} 0 < x < \pi \\ 0 < y < \pi \end{cases}$ ເຮົາໄດ້ $\begin{cases} 0 < \frac{x+y}{2} < \pi \\ 0 < \frac{x-y}{2} < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ (I)

   ພິສູດວ່າ $\sin(\frac{x+y}{2}) - \frac{\sin x + \sin y}{2} \geq 0$

   ເບື້ອງຊ້າຍ = ບຊ= $\sin(\frac{x+y}{2}) - \frac{1}{2}.2[\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})]$

$$= \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\left[1 - \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]$$

   ຈາກ (I)ເຮົາມີ $\begin{cases} 0 < \sin(\frac{x+y}{2}) \leq 1 \\ 0 < \cos(\frac{x-y}{2}) \leq 1 \end{cases}$ ດັ່ງນັ້ນ $\begin{cases} \sin(\frac{x+y}{2}) > 0 \\ 1 - \cos(\frac{x-y}{2}) \geq 0 \end{cases}$

   ສະນັ້ນ ບຊ ≥ 0 ເຮົາໄດ້ອັນພິສູດ.

3. ເພີ່ນໃຫ້ອັນດັບ ກຳນົດດັ່ງລຸ່ມນີ້:

   (1, 2) ວົງເລບທີ 1

   (3, 4, 5, 6) ວົງເລບທີ 2

   (7, 8, 9,10,11,12) ວົງເລບທີ3

   1) ຈົ່ງຊອກຫາຈຳນວນສຸດທ້າຍຂອງວົງເລບທີ n ຕາມຄ່າຂອງ n

   2) ຈຳນວນ 2009 ຢູ່ວົງເລບທີ່ເທົ່າໃດ? ຈົ່ງອະທິບາຍ.

   3) ຊອກຜົນບວກ ຂອງທຸກຈຳນວນໃນວົງເລບທີ່ບັນຈຸ 2009.

ບົດແກ້:

(1, 2) ວົງເລບທີ 1 ມີ 2 ຈຳນວນ ເຫັນວ່າ ຈຳນວນສຸດທ້າຍ ແມ່ນ 2=2

(3, 4, 5, 6) ວົງເລບທີ 2 ມີ 4 ຈຳນວນ ເຫັນວ່າ ຈຳນວນສຸດທ້າຍ ແມ່ນ 6=4 +2

(7, 8, 9,10,11,12) ວົງເລບທີ3 ມີ 6 ຈຳນວນ ເຫັນວ່າ ຈຳນວນສຸດທ້າຍ ແມ່ນ 12=6+4+2

... ...

ວົງເລບທີ n ມີ $2n$ ຈຳນວນ ເຫັນວ່າ ຈຳນວນສຸດທ້າຍ ແມ່ນ

$$2n + \cdots + 6 + 4 + 2$$

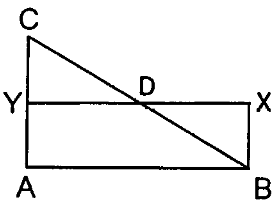
1) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = (2 + 2n)\frac{n}{2} = (1 + n)n$
2) ເຫັນວ່າ $46.45 = 2070$ ແມ່ນຈຳນວນສຸດທ້າຍຂອງວົງເລບທີ່ 45

   ແລະຈຳນວນທຳອິດແມ່ນ $2070 - (2.45 - 1) = 2070 - 89 = 1981$

   ສະແດງວ່າ2009 ຢູ່ໃນວົງເລບທີ່ 45 ເພາະ $1981 < 2009 < 2070$
3) ຜົນບວກ ຂອງທຸກຈຳນວນໃນວົງເລບ45 ແມ່ນ $(1981 + 2070)\frac{90}{2} = 182295$

4. ເພິ່ນໃຫ້ຮູບສາມແຈ ABC ໂດຍທີ່ $AB = 4\ cm; AC = 3\ cm; BC = 5\ cm.$
   1) ຈົ່ງສ້າງຮູບສີ່ແຈສາກ $ABXY$ ທີ່ມີເນື້ອທີ່ເທົ່າກັບເນື້ອທີ່ຂອງຮູບສາມແຈ ABC ຂ້າງເທິງ.
   2) ໂດຍຖອນຈາກຂໍ້ 1) ຈົ່ງສ້າງຮູບຈະຕຸລັດທີ່ມີເນື້ອທີ່ເທົ່າກັບເນື້ອທີ່ຂອງຮູບສາມແຈ ABC ຂ້າງເທິງ

ບົດແກ້:ເຫັນວ່າ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ດັ່ງນັ້ນ ΔABC ສາກຢູ່ A.

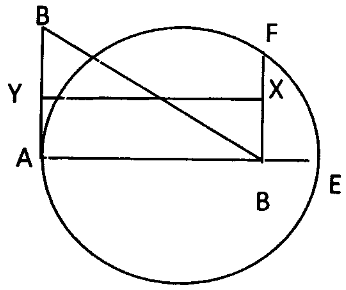


1) ເນື້ອທີ່ $\Delta ABC = \frac{1}{2}AB.AC = AB.\frac{AC}{2}$ ດັ່ງນັ້ນລວງສູງຂອງຮູບ 4 ແຈສາກ $ABXY$ ຊຶ່ງແມ່ນ $AY = \frac{AC}{2}$ ເຮົາຈະໄດ້ຮູບ $ABXY$ ທີ່ຕ້ອງການ (ດັ່ງຮູບ)

ຖ້າເຮົາຂີດຕໍ່ (AB) ໂດຍໃຫ້ $BE = BX$ ແລະ ເມື່ອເຮົາສ້າງຮູບວົງມົນທີ່ມີເສັ້ນຜ່ານກາງ AE, (BX)ຈະຕັດເສັ້ນວົງມົນຢູ່ເມັດ F ແລະ ເຮົາຈະໄດ້ $BF^2 = AB.BE = AB.BX =$ ນ/ທ $ABXY$

= ນ/ທ ΔABC

ດັ່ງນັ້ນ BF ແມ່ນຂ້າງຮູບຈະຕຸລັດທີ່ຊອກຫາ



5. ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3} \leq 2|a|$

ບົດແກ້

ເງື່ອນໄຂ $a^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow |a| \geq 1$, ວາງ $|a| = \frac{1}{cos\propto}$, ດ້ວຍ $\propto \in [\, 0, \frac{\pi}{2} [$

ເມື່ອນັ້ນ ອະສົມຜົນໄດ້ປ່ຽນເປັນຮູບຮ່າງ

$$\sqrt{\frac{1}{cos^2\propto}-1}+\sqrt{3} \leq \frac{2}{cos\propto} \;\Leftrightarrow\; tg \propto +\sqrt{3} \leq \frac{2}{cos\propto}$$

$\Leftrightarrow sin \propto +\sqrt{3}cos \propto \leq 2 \Leftrightarrow \; \frac{1}{2}sin \propto + \frac{\sqrt{3}}{2}cos \propto \leq 1$

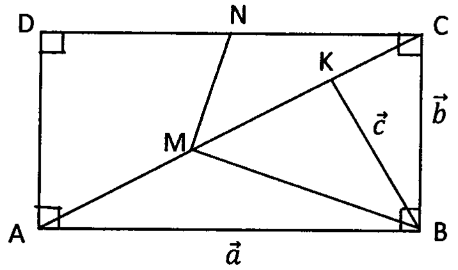
$\Leftrightarrow sin \propto (\propto + \frac{\pi}{3}) \leq 1$ ຖືກ

6. ໃຫ້ຮູບສີ່ແຈສາກ $ABCD$. ຂີດ $BK \perp AC$. ເອີ້ນ M, N ແມ່ນ ເມັດແບ່ງກາງຂອງ $[AK]$ ແລະ $[CD]$ ຕາມລໍາດັບ.

1) ຈົ່ງພິສູດ $\widehat{BMN} = 90^\circ$

2) ຈົ່ງຊອກເງື່ອນໄຂຂອງຮູບສີ່ແຈສາກ $ABCD$ ເພື່ອໃຫ້ຮູບສາມແຈ BMN ເປັນຮູບສາມແຈສາກທ່ຽງ

ບົດແກ້ :



1) ວາງ $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{BK} = \vec{c}$

ແລະ $BA = a, BC = b, BK = c$ ເຮົາມີ $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}) + \vec{b} + \frac{\vec{a}}{2} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c})(\vec{a}+\vec{c}) = \frac{1}{4}(2\vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c} + 2\vec{b}.\vec{c} - c^2)$$

$$= \frac{1}{4}[\,2\vec{a}.\vec{b} + (\vec{b}-\vec{a})\vec{c} + (\vec{b}-\vec{c})\vec{c}]$$

ຍ້ອນ $\vec{a}.\vec{b} = 0$; $(\vec{b}-\vec{a})\vec{c} = 0$; $(\vec{b}-\vec{c})\vec{c} = 0$

ສະນັ້ນ $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BM} = 0 \Rightarrow \widehat{BMN} = 90^\circ$

2) ເຮົາມີ $BM = MN \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{MN}^2$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})\right|^2 = (\vec{b} - \tfrac{1}{2}\vec{c})^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 + 2\vec{a}.\vec{c} = 4b^2 + c^2 - 4\vec{b}.\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ac.cosB_1 = 4b^2 - 4bccosB_2, \qquad (\widehat{ABK} = B_1, \widehat{KBC} = B_2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2c.(acosB_1) = 4b^2 - 4c(bcosB_2)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2c^2 = 4b^2 - 4c^2 \Leftrightarrow a^2 + 6c^2 - 4b^2 = 0 \quad (1)$$

ຍ້ອນວ່າ $ab = AC.c$ ສະນັ້ນ $a^2b^2 = AC^2c^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{a^2b^2}{AC^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ ແທນໃສ່ (1) ເຮົາໄດ້

$$a^2 + \frac{6a^2b^2}{a^2+b^2} - 4b^2 = 0 \Leftrightarrow (a^2-b^2)(a^2+4b^2) = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

ສະນັ້ນ ເງື່ອນໄຂຕ້ອງການ ແລະ ພໍພຽງເພື່ອໃຫ້ຮູບສາມແຈ BMN ສາກທ່ຽງ ແມ່ນ $ABCD$ ແມ່ນຮູບຈະຕຸລັດ